

Выпуклость и дифференцируемость в гильбертовых пространствах**Вариант 5**

1. В пространстве $L_2(0, 1)$ выбраны два множества

$$U_1 = \left\{ u(t) \in L_2(0, 1) : \int_0^1 u(t) + t^2 u(t) dt \leq 1 \right\},$$

$$U_2 = \left\{ u(t) \in L_2(0, 1) : \int_0^1 u^2(t) + tu(t) + u(t) dt \leq 1 \right\}$$

Исследуйте каждое из них на выпуклость, замкнутость, ограниченность, слабую компактность и компактность.

2. В пространстве ℓ_2 задан функционал

$$J(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x_{n+1} - \frac{x_n}{n} \right)^2, \quad x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in \ell_2$$

Исследуйте функционал на непрерывность, полунепрерывность снизу, слабую полунепрерывность снизу. Найдите первую производную по Фреше функционала. Исследуйте этот функционал на выпуклость и сильную выпуклость на всем пространстве ℓ_2

3. Исследуйте на существование решения задачу оптимизации:

$$J(u) = \int_{-1}^1 u^2(t) - \frac{3t^4}{\sqrt{2}} \cdot u(t) dt \rightarrow \inf, \quad u \in U,$$

$$U = \left\{ u = u(t) \in L_2(-1, 1) : \int_{-1}^1 u^2(t) dt \leq 1 \right\}$$